**Phương pháp tính gần đúng đạo hàm**

**Tính gần đúng đạo hàm có ứng dụng gì?**

+) tìm gần đúng vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của một vật thể chuyển động , vẽ đồ thị, tiếp tuyến của đường cong,vận tốc phản ứng tại một thời điểm trong phản ứng hóa học...

**1.Ý tưởng phương pháp**

Đặt vấn đề: Khi giải quyết các bài toán thực tế thường phải tìm đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm nào đó, trong khi không biết cụ thể hàm f(x) mà chỉ biết giá trị của nó dưới dạng bảng số . Cũng có trường hợp hàm y = f(x) đã biết nhưng khá phức tạp, việc tính đạo hàm cũng gặp nhiều khó khăn, đôi khi không cần thiết giá trị chính xác của đạo hàm tại điểm mong muốn, mà chỉ cần giá trị gần đúng .

Ý tưởng phương pháp tính gần đúng đạo hàm: thay hàm f(x) bằng đa thức nội suy L(x), sau đó tính f’(x) L’(x) với x   [a,b] nào đó. Từ đó ta cũng tính được các đạo hàm cấp cao khi đã biết đa thức nội suy.{\displaystyle \in }

**2. Xây dựng công thức**

**2.1 Tính gần đúng đạo hàm cấp 1**

**2.1.1 Tính đạo hàm nhờ đa thức nội suy Lagrange**

Từ bảng số yi=f(xi) , i= 0,1,...,n

Bằng đa thức nội suy Lagrange: f(x)L(x) = j(x).yi

=> f’(x) L’(x) = j(x).yi

Và suy ra f”(x),....

Xét trường hợp các mốc nội suy xi , i=0,1,..n cách đều nhau

Do L(x) =j(x).=

Trong đó = ;

=

Vậy: L(x) =

Hay: L(x) = L() = P(t)

Vậy f’(x)

**1) Khi n=1**

Đa thức nội suy Lagrange có dạng:

L(x) =

Với h = , do đó ta có:

f’(x) =

Đặc biệt tại x0 có :

= gọi là công thức sai phân tiến tại điểm .

Còn tại x1 có: = gọi là công thức sai phân lùi và thường được viết dưới dạng:

**2) Khi n=2**

f’(x) (1)

**+) x=x0** => t = 0: f’(x0)

f’(x0) và được gọi là công thức sai phân tiến với 3 điểm và thường được viết dưới dạng:

f’(x0)

**+) x=x1** => t =1: f’(x1) (

f’(x1) được gọi là công thức sai phân trung tâm.

**+) x=x2** => t = 2: f’(x2) =

f’(x2) được gọi là công thức sai phân lùi với 3 điểm và thường được viết dưới dạng:

f’(x0)

Sai số (1) đạt cấp O(

*Chứng minh:*

Bằng công thức khai triển Taylor với phần dư ta có:

f(x1)=f(x0+h)=f(x0) +++ (

f(x2)= f(x0+2h)= f(x0)+++ (

4.f(x1)f(x2) = 3f(x0)+2+

=> = = )

**2) Khi n=3**

Tương tự ta có:

f’(x0)

f’(x1)

f’(x2)

f’(x3)

Sai số đạt cấp O(

**Chú ý**: Để tính đạo hàm tại các điểm không là mốc ta lại áp dụng phương pháp nội suy Lagrange. Sai số khi tính đạo hàm ngoài sai số của công thức còn phải tính đến sai số làm tròn, và các bước nội suy h phải đủ nhỏ.

**2.1.2 Tính đạo hàm nhờ đa thức nội suy Newton**

Theo công thức nội suy Newton tiến với các mốc cách đều ta có:

Trong đó h= xi+1xi , i=

Vậy:

Vì đa thức nội suy Lagrange hay Newton là giống nhau nên các công thức tính gần đúng trong các hợp là giống nhau.

**Chú ý:**

+) Công thức nội suy Newton tiến thuận lợi khí tính đạo hàm tại điểm và gần với .

+) Công thức nội suy Newton lùi thích hợp cho việc tính đạo hàm tại điểm và gần với .

+) Khi tính đạo hàm tại điểm gần (giữa bảng sai phân), nếu thì ta xem là , còn nếu thì xem là .

**2.2 Tính gần đúng đạo hàm cấp cao**

Công thức tính đạo hàm cấp cao có thể xuất phát từ đa thức nội suy hoặc từ khai triển công thức Taylor.

Từ khai triển công thức Taylor với phần dư ta có:

f(x+h) = f(x)++ +

f(xh) = f(x)+

;)

f(x+h) f(xh) = 2f(x) ++

+ O(

Tương tự như vậy:

Sai số đạt cấp O(h2).

**3. Thuật toán**

**Input:** Nhập bảng số yi=f(xi) với i=

Nhập giá trị mà chúng ta cần tính đạo hàm tại , m là cấp của đạo hàm.

**Output:** Đạo hàm gần đúng của hàm số tại điểm .

Bước 1: Gán w =1; P=0;

Bước 2:Cho i=0:n , cho j=[0:i1 i+1:n] thì w = ;

thì P = P+ w\*;

Bước 3: Tính đạo hàm của đa thức P tại

**4. Chương trình**

Ở đây, ta viết 2 chương trình tính gần đúng đạo hàm. Chương trình thứ nhất tìm ra đa thức nội suy Lagrange từ bảng số rồi tính gần đúng đạo hàm tại điểm cần tính. Chương trình thứ hai tính giá trị gần đúng của đạo hàm tại các mốc các đều mà công thức tính đã nêu trên.

Chương trình thứ nhất:

function [D]= lagrangeinterp(X,Y,c,m)

u=sym('x'); % X Y la bang so nhap vao, dao ham tai diem c voi cap m;

n=length(X);

P=0;

for i=1:n

w=1;

for j=[1:i-1 i+1:n]

w=(u-X(j))./(X(i)-X(j)).\*w;

end

P=P+w\*Y(i);

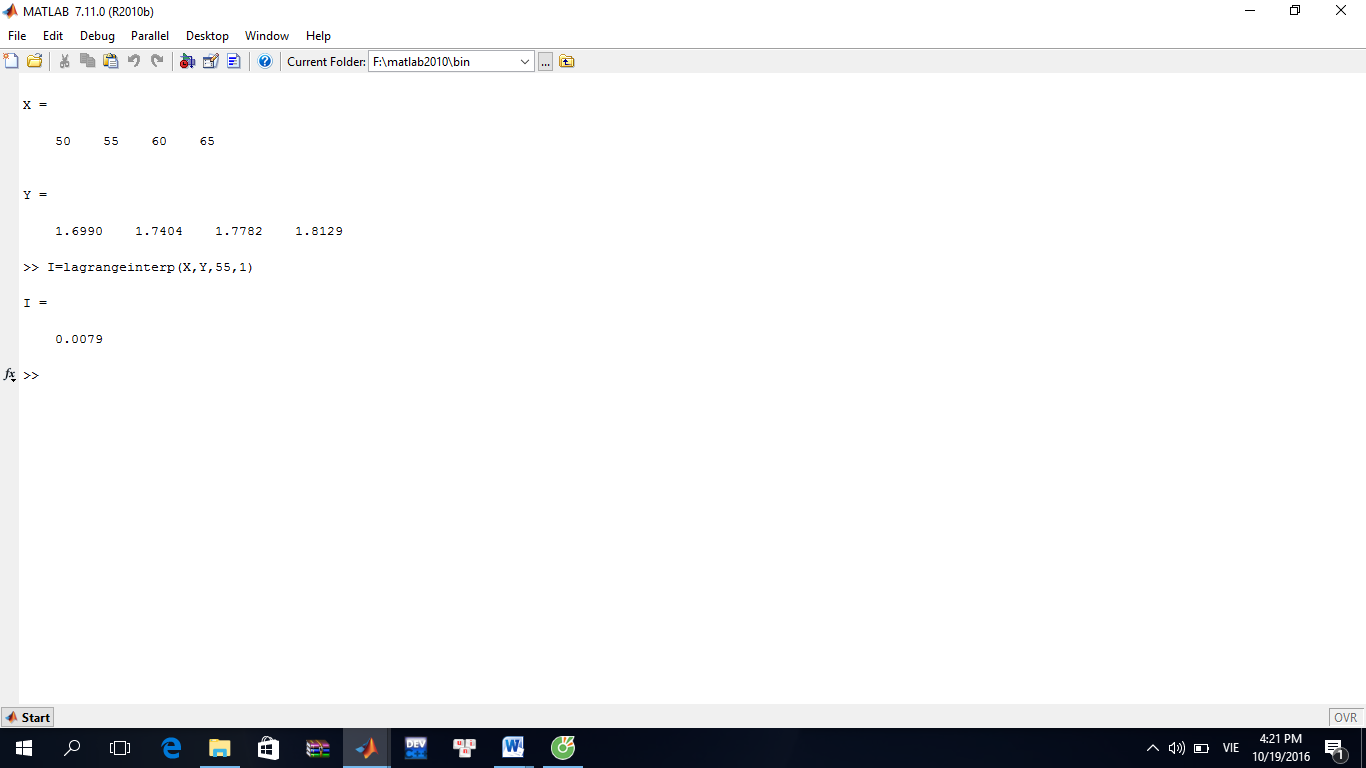
end

P=expand(P);

D=subs(diff(P,m),c);

End

Ví dụ:



Chương trình thứ 2:

function [I] =tinhdaoham(s,p,X,Y)

if p==1 %p la cap cua dao ham va s la vi tri can tinh dao ham cua X(s);

if length(X)==3

h=(X(2)-X(1));

y=zeros(1,3);

y(1)=(-3\*Y(1)+4\*Y(2)-Y(3))/(2\*h);

y(2)=(-Y(1)+Y(3))/(2\*h);

y(3)=(Y(1)-4\*Y(2)+3\*Y(3))/(2\*h);

for i=1:3

if i==s

I=y(i);

end

end

end

if length(X)==4

h=(X(2)-X(1));

y=zeros(1,4);

y(1)=(-11\*Y(1)+18\*Y(2)-9\*Y(3)+2\*Y(4))/(6\*h);

y(2)=(-2\*Y(1)-3\*Y(2)+6\*Y(3)-Y(4))/(6\*h);

y(3)=(Y(1)-6\*Y(2)+3\*Y(3)+2\*Y(4))/(6\*h);

y(4)=(-2\*Y(1)+9\*Y(2)-18\*Y(3)+11\*Y(4))/(6\*h);

for i=1:4

if i==s , I=y(i);

end

end

end

end

if p==2

h=X(2)-X(1);

y(2)=(Y(1)-2\*Y(2)+Y(3))/(h\*h);

I= y(2);

end

if p==3

h=X(2)-X(1);

y(3)=(Y(5)-2\*Y(4)+2\*Y(2)-Y(1))/(2\*h\*h\*h);

I=y(3);

end

if p==4

h=X(2)-X(1);

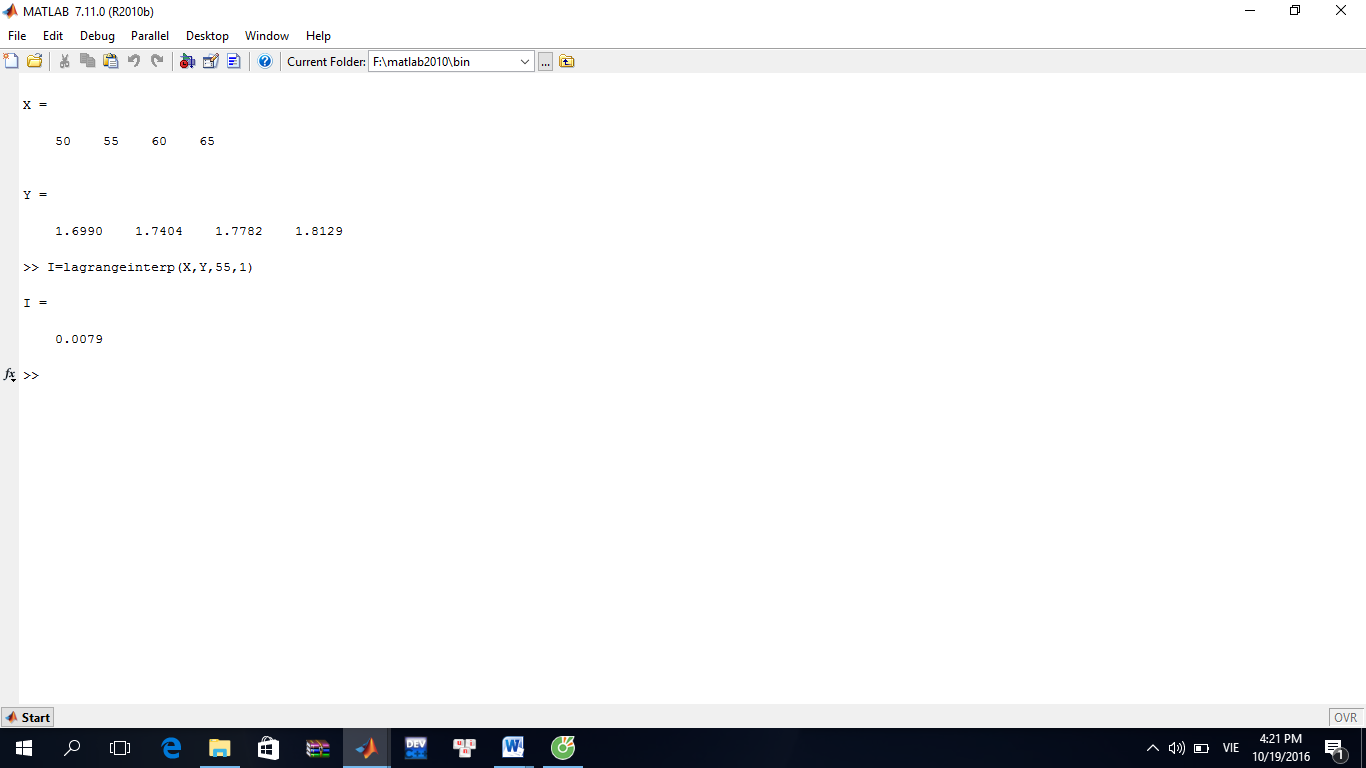
y(3)=(Y(5)-4\*Y(4)+6\*Y(3)-4\*Y(2)+Y(1))/(h^4);

I=y(3);

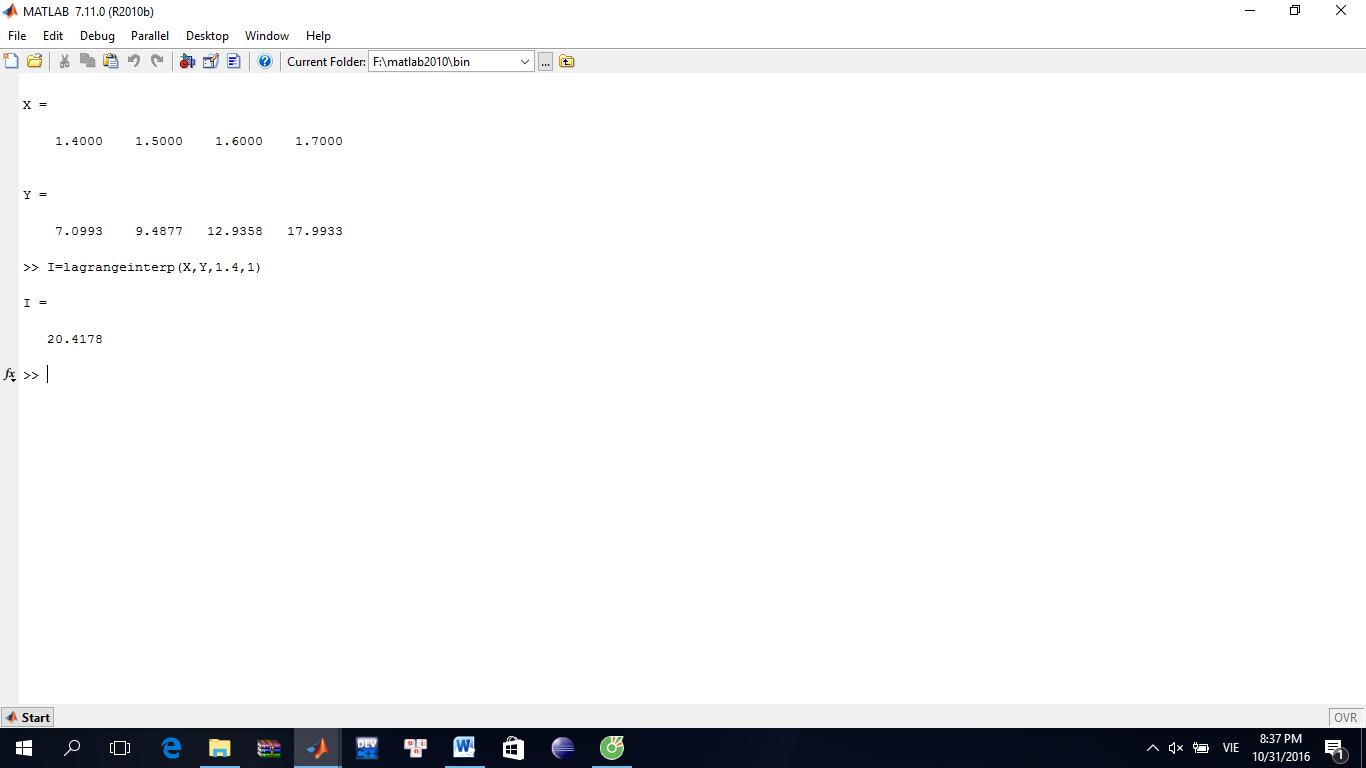
end

end

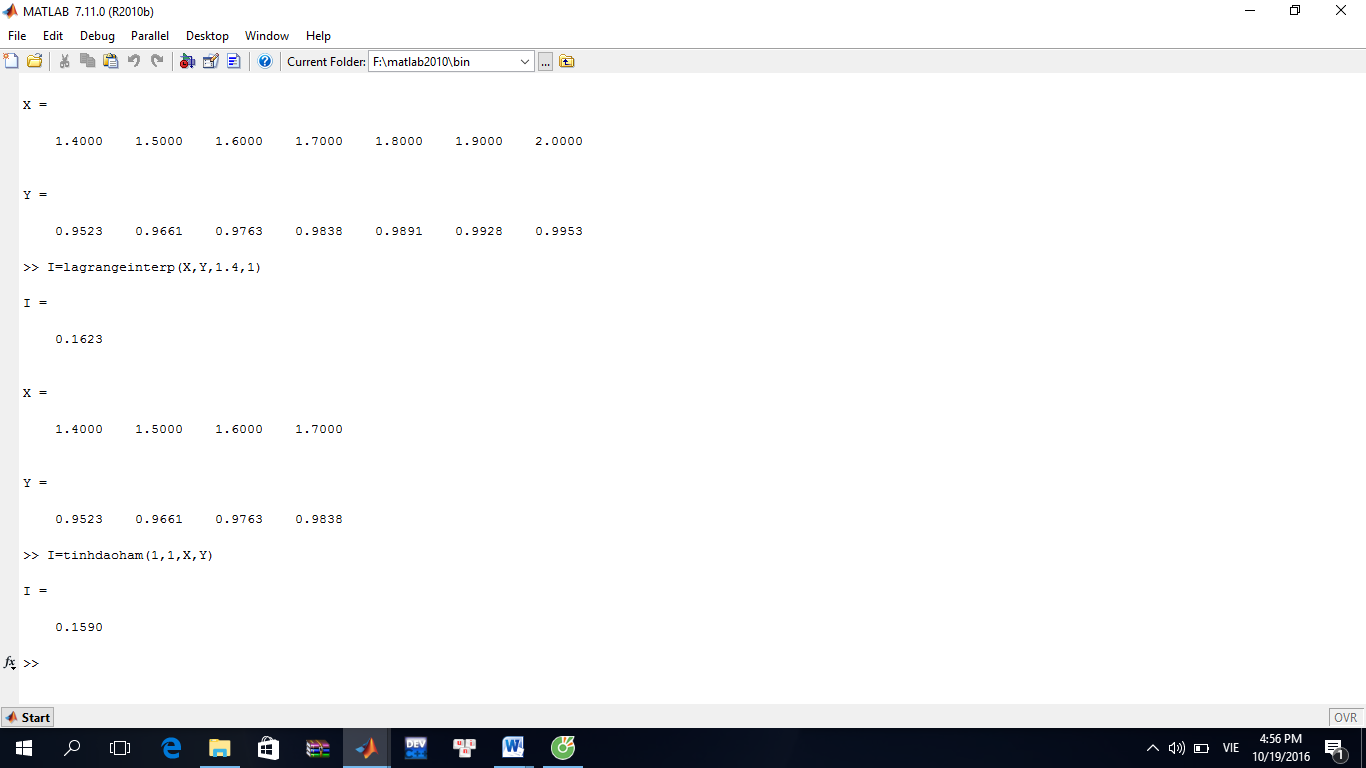
Ví dụ:



**Nhận xét:**Ở đây, ta chọn hàm y=log10(x) và y’(55) = 0,00789 trùng nhau tới 3 số sau dấu phẩy so với kết quả tính gần đúng. Vì hàm log(x) là hàm tăng rất chậm và như vậy sai số sẽ khá nhỏ, tuy nhiên khi xét hàm tăng nhanh thì sai số sẽ lớn và kết quả tính sẽ không còn đạt độ chính xác cao nữa. Để làm rõ hơn vấn đề này, ta xét ví dụ sau:

  
 Hàm đang xét: y= có đạo hàm y’(1.4)=19.8781 (giá trị tính đạo hàm gần đúng là 20.4178 ) có độ chính xác không cao vì hàm y= là hàm tăng rất nhanh.

Một điều lưu ý nữa là nếu dùng hết toàn bộ các mốc nội suy để xây dựng đa thức nội suy có thể kết quả tính gần đúng sẽ sai lệch khá nhiều. Ví dụ dưới đây ta xét hàm tích phân xác suất y = với giá trị đạo hàm y’(1.4) =0.1589 :



**Phương pháp tính gần đúng tích phân**

**Tính gần đúng tích phân có ứng dụng gì?**

+) Tính gần đúng điện tích hình dưới đường cong, thể tích khối tròn xoay, trọng tâm bề mặt,...

+)Tính gần đúng công sinh ra bởi lức quán tính , điện tích, moment quán tính,...

**1.Ý tưởng phương pháp**

Giả sử hàm số liên tục trên đoạn [a,b] và nguyên hàm của nó là F(x), khi đó giá trị của tích phân xác định trên đoạn [a,b] có được nhờ công thức Newton-Leibniz:

= F(x) = F(b) F(a)

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp , nguyên hàm F(x) của f(x) không tìm được bằng các phép biến đổi sơ cấp, hoặc nguyên hàm khá phức tạp thì giá trị của tích phân chỉ có thể tính ở dạng gần đúng.

Phương pháp giải quyết : tính giá trị của hàm f(x) tại một số điểm

xi [a,b] với i= ta xây dựng đa thức nội suy 𝜑(x) thì

I=

**2. Xây dựng công thức**

**2.1 Tính gần đúng tích phân xác định nhờ đa thức nội suy Lagrange**

Giả sử biết giá trị yi = f(xi) với i=;

Trong đó : a x0 < x1 < ….< xn-1 < xn  b.

Theo các giá trị của bảng số , ta xây dựng đa thức nội suy Lagrange

( kí hiệu là L(x)):

L(x) =

trong đó =, đồng thời L(xi) = yi ; i=.

Thay hàm f(x) bởi đa thức nội suy L(x) ta được :

I = = + (1)

Với là sai số, từ (1) và bỏ qua sai số ta được:

I . (2)

Trong đó: =

Công thức (2) là công thức tính gần đúng tích phân I (còn gọi là công thức cầu phương gần đúng).

**2.1.1 Công thức Newton-Cotes, công thức hình thang và Simpson**

Chiađoạn [a,b] thành n phần bằng nhau có bướch =  bởi các điểm chia:

x0=a, xn=b, xi= x0+t.h t =;

Đồng thời tại các điểm đó ta có bảng số : yi = f(xi) i=.

Từ bảng trên, theo công thức (3) ta có:

I = .yi (3)

với là số không đổi nào đó , ta tìm biểu thức biểu hiện các trong công thức (3).Nếu sử dụng đa thức nội suy Lagrange thì:

h.. i=.

Hay : =(b-a).

Trong đó : = . (4)

gọi là hệ số Cotes.

Vậy : I = (b-a) (5)

Từ công thức (4) dễ kiểm tra lại rằng:

= => Hệ số Cotes đối xứng qua mốc trung gian. Công thức (5) với tính theo (4) gọi là công thức Newton-Cotes.

Sau đây ta xét một vài trường hợp riêng:

**1)** **Xét khi n=1, ta có:**

H0 =

H1=

Vậy : I = (y0+y1) (6) Công thức (6) gọi là công thức hình thang.

**2) Xét khi n=2, ta có:**

H0 =

H1=

H2 =

=> I = (y0+ 4y1+ y2) (7)

Công thức (7) gọi là công thức Simpson hay công thức Parabol.

**3) Xét trường hợp n=3, ta có:**

I = (y0+ 3y1+ 3y2+ y3)

Hoàn toàn tương tự ta được các công thức Cotes với n=4,5,... Để sử dụng thuận lợi ta đưa ra bảng hệ số Cotes:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |  |  |  |  |  | Mẫu số chung N |
| 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  | 2 |
| 2 | 1 | 4 | 1 |  |  |  |  |  | 6 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |  |  |  |  | 8 |
| 4 | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 |  |  |  | 90 |
| 5 | 19 | 75 | 50 | 50 | 75 | 19 |  |  | 288 |
| 6 | 41 | 216 | 27 | 272 | 27 | 216 | 41 |  | 840 |
| 7 | 751 | 3577 | 1323 | 2989 | 2989 | 1323 | 3577 | 751 | 17280 |

Trong đó n là số mốc nội mà công thức sử dụng; =N. ; tính theo công thức (4); N là mẫu số chung trong công thức được chọn tương ứng. Từ bảng hệ số ta thấy n càng lớn công thức càng cồng kềnh, trong kĩ thuật thường sử dụng công thức hình thang (6) hay công thức Simpson (7).

**2.1.2 Sai số của công thức hình thang và công thức Simpson**

**2.1.2.1 Sai số của công thức hình thang (6)**

Khi n=1 ta có hai mốc nội suy x0=a, x1=b, h= ba. Từ sai số của đa thức nội suy Lagrange:

|R1(x)| = h2.t(1t)

Với xx0=h.t; M2 =

Vậy =

= (8)

Với là giá trị gần đúng của tính theo vế phải của công thức (6).

(8) là công thức đánh giá sai số của công thức hình thang.

**2.1.2.2 Sai số của công thức Simpson**

Khi n=2 thì đoạn [a,b] được chia làm hai đoạn h = ; các mốc là a=x0, x1= , x2=b.

Gọi = (y0+4y1+y2) là giá trị gần đúng của tích phân ; trong đó

yi=f(xi) i=0,1,2.

Thực hiện phép biến đổi để được chỉ số đối xứng bằng cách đặt:

x= t + ; thì x1= => t=0

x0= =>t =; x2= b => t=h;

Viết lại công thức (7):

Đặt (t) = [f(x0t)+4f(x0)+f(x0+t)]

với 0th.

Xét hàm F(t) = (t) – (h)

Dễ dàng thấy rằng F(0)=F(h)=0, và:

F’(t)=f(x0+t)+f(x0t) [f’(x0t)+f’(x0+t)]

[f(x0t)+4f(x0)+f(x0+t)](h)

F’’(t)= f’(x0+t)f’(x0t) [f’(x0t)+f’(x0+t)] [f’’(x0t)+f’’(x0+t)] – [f’(x0t)+f’(x0+t)] (h)

=> F’(0)=F’’(0)=0

F’’’(t)= [f’’’(x0+t)f’’’(x0t)] (h)

= (𝜉) (h) (9)

(Theo định lí Lagrange, 𝜉(x0-t,x0+t))

Do F(0)=F(h)=0; áp dụng định lí Rolle, tìm được điểm t1(0,h) để F’(t1)=0. Tiếp theo F’(0)=F’(t1)=0, tìm được t2(0,t1) để F’’(t2)=0. Lại do F’’(0)= F’’(t2)=0 tìm được t3 (0,t2) để F’’’(t3)=0. Từ (9) ta suy ra:

F’’’(t3)= =0

Hay (h)= với x0t3< 𝜉 < x0 + t3

Vậy khi t = h :

=

Hay (10)

( với M4 = )

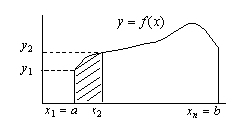
(10) là công thức đánh giá sai số của công thức Simpson (7). Từ các công thức đánh giá sai số ta thấy n càng lớn thì độ chính xác càng cao, song công thức càng phức tạp. Để được h nhỏ mà công thức tính không phức tạp người ta khắc phục theo các công thức dưới đây.

**2.1.3 Công thức hình thang tổng quát và công thức Simpson tổng quát**

Giả sử cần tính trên đoạn [a,b] lớn , thì h = ba theo công thức hình thang , h = theo công thức Simpson thì độ sai xấp xỉ tương ứng cấp O() và O() còn quá lớn.

Để khắc phục được h bé (0<h<1) mà vẫn sử dụng được công thức trên, người ta dựa vào tính chất khả tổng của tích phân xác định, nghĩa là chia đoạn [a,b] thành các đoạn nhỏ rồi áp dụng công thức hình thang hay Simpson trên đoạn nhỏ đó.

**2.1.3.1 Công thức hình thang tổng quát**

[](https://www.google.com.vn/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&ved=&url=https://voer.edu.vn/c/cac-cau-truc-dieu-khien/e5c09e6a/78bceb43&bvm=bv.135258522,d.dGo&psig=AFQjCNFSqHehVs1QUWbxYnuP5xqwCDflAA&ust=1475945560636996)

Chia đoạn [a,b] thành n phần, có độ dài h = bởi các điểm chia

a , , .

Kí hiệu . Áp dụng công thức hình thang (6) cho từng đoạn [

== ++....+

+ + ...+

(10)

Gọi vế phải của (10)là thì sai số được xác định:

+

+....+ .

Theo công thức (8), ta có:

++....+ (11)

với j =

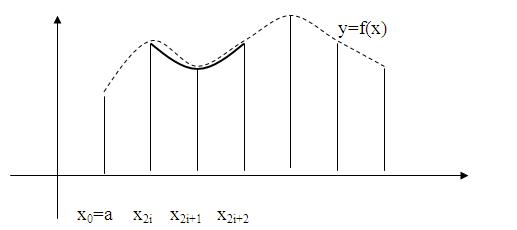
Đặt

Từ (11) ta được:

| (12)

(12) là công thức sai số của công thức hình thang tổng quát.

**2.1.3.2 Công thức Simpson tổng quát**



Chia đoạn [a,b] thành 2m phần bằng nhau, có độ dài h = bởi các điểm chia : a , , . i =.

Áp dụng công thức Simpson (7) đối với các đoạn :

...; .

Tương tự như trên ta được:

= ++...

...+

=

(13)

(13) được gọi là công thức Simpson tổng quát .

++....+

với j =

Đặt thì:

= (14)

(14) là công thức đánh giá sai số của công thức Simpson tổng quát.

**2.2 Tính gần đúng tích phân kép**

Trong mục này ta chỉ xét một phương pháp đơn giản nhất để tính tích phân hai lớp trên hình chữ nhật D = [a;b]x[c;d].

Xét tích phân I =

Chia hình chữ nhật D thành các hình chữ nhật con bởi các đường song song với các trục tọa độ và đều nhau theo từng biến có khoảng cách tương ứng là:

h =; k =; ;

Trong hình chữ nhật con đầu trên D1 = {; }

Với a, , ta có:

= =

Đặt (y) = thì

Áp dụng công thức Simpson cho tích phân thì

với i=0,1,2.

Áp dụng lần nữa công thức Simpson đối với :

Thay tất cả vào (24) ta được :

[(z00 + z02+ z20+ z22) + 4(z01 + z10 + z21 + z12) +16z11]

Từ đó suy ra được công thức gần đúng của tích phân hai lớp:

**3. Thuật toán**

+)Phương pháp Simpson tổng quát

**Input:** Nhập a,b, hàm f(x), n=[] + 1

(với 𝜀 là sai số, M = )

**Output:** là giá trị gần đúng.

Bước 1:

Bước 2: Cho i = 0 2n thì yi = f(xi)

Bước 3: Cho i = 0 n-1 thì

Bước 4:

+) Phương pháp hình thang tổng quát

**Input:** Nhập a, b, n = + 1

(với 𝜀 là sai số, M = )

**Output:** Giá trị I gần đúng

Bước 1: h =

Bước 2: Cho i= 0n thì yi = f(xi)

Bước 3: I = h()

+) Tích phân kép

**Input**: hàm f(x,y) , miền D = [a;b]x[c;d], m,n lần lượt là độ chia của hình chữ nhật.

Output: giá trị I gần đúng.

Bước 1: gán I=0.

Bước 2:cho i=1:(2m+1), cho j=1:(2n+1) thì z(i,j)=f(xi,yj);

Bước 3: cho i=1:m, cho j=1:n thì

Q(i,j)=hk((z(2i-1,2j-1)+z(2i-1,2j+1)+z(2i+1,2j-1)+z(2i+1,2j+1))+

4(z(2i,2j-1)+z(2i,2j+1)+z(2i- 1,2j)+z(2i+1,2j))+16z(2i,2j))/9;

Bước 4:cho i=1:m, cho j=1:n thì I=I+Q (i,j);

**4. Chương trình**

+) Chương trình tính gần đúng tích phân bằng phương pháp hình thang tổng quát:

function [I]=congthuctrapezoid(fun,a,b,n)

m = n + 1;

h=(b-a)/n;

x=a:h:b;

f= zeros(size(x));

for i=1:m

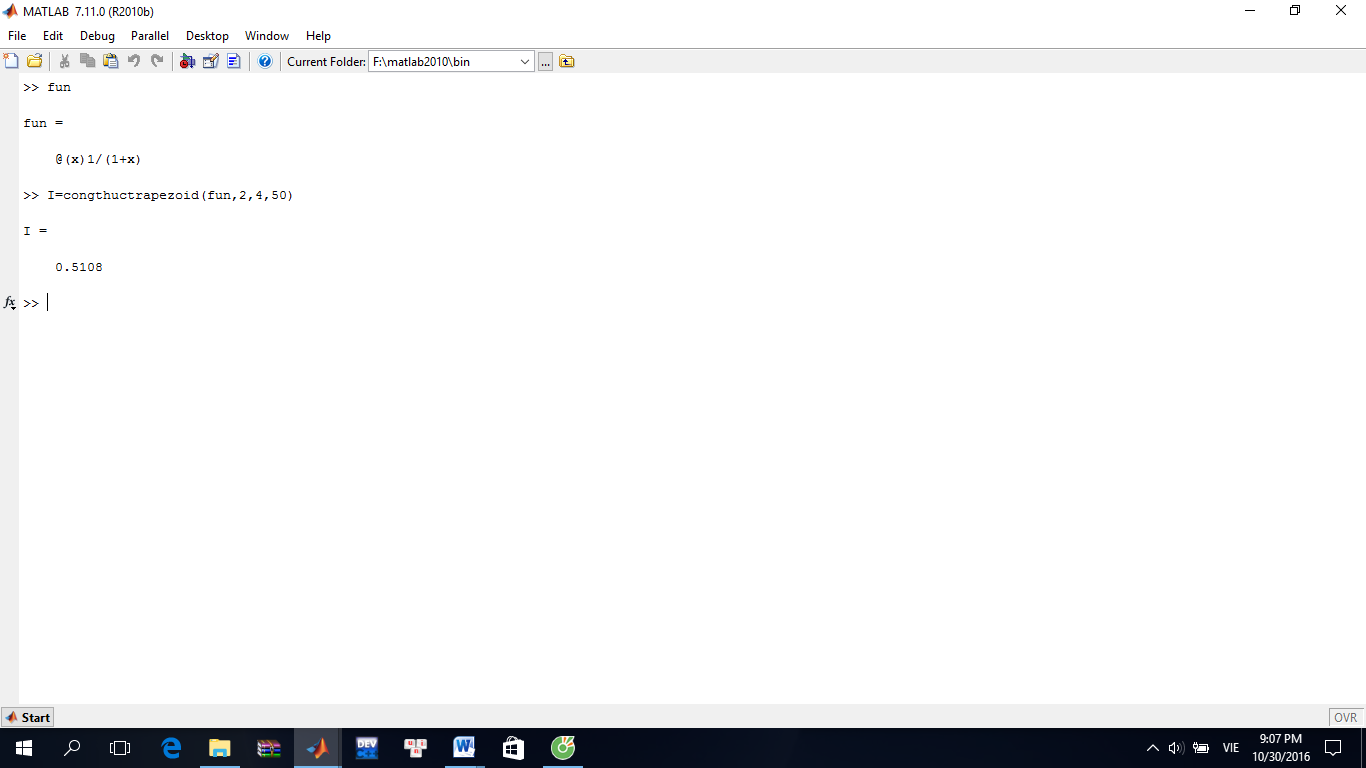
f(i)=feval(fun,x(i));

end

I=h\*(0.5\*f(1)+sum(f(2:m-1))+0.5\*f(m));

end

Ví dụ:



+) Chương trình tính gần đúng tích phân bằng công thức Simpson tổng quát:

function I = simpson(fun,a,b,n)

m=2\*n+1;% n la so hinh thang cong con;

h=(b-a)/(m-1);

x=a:h:b;

f=zeros(size(x));

for i=1:m

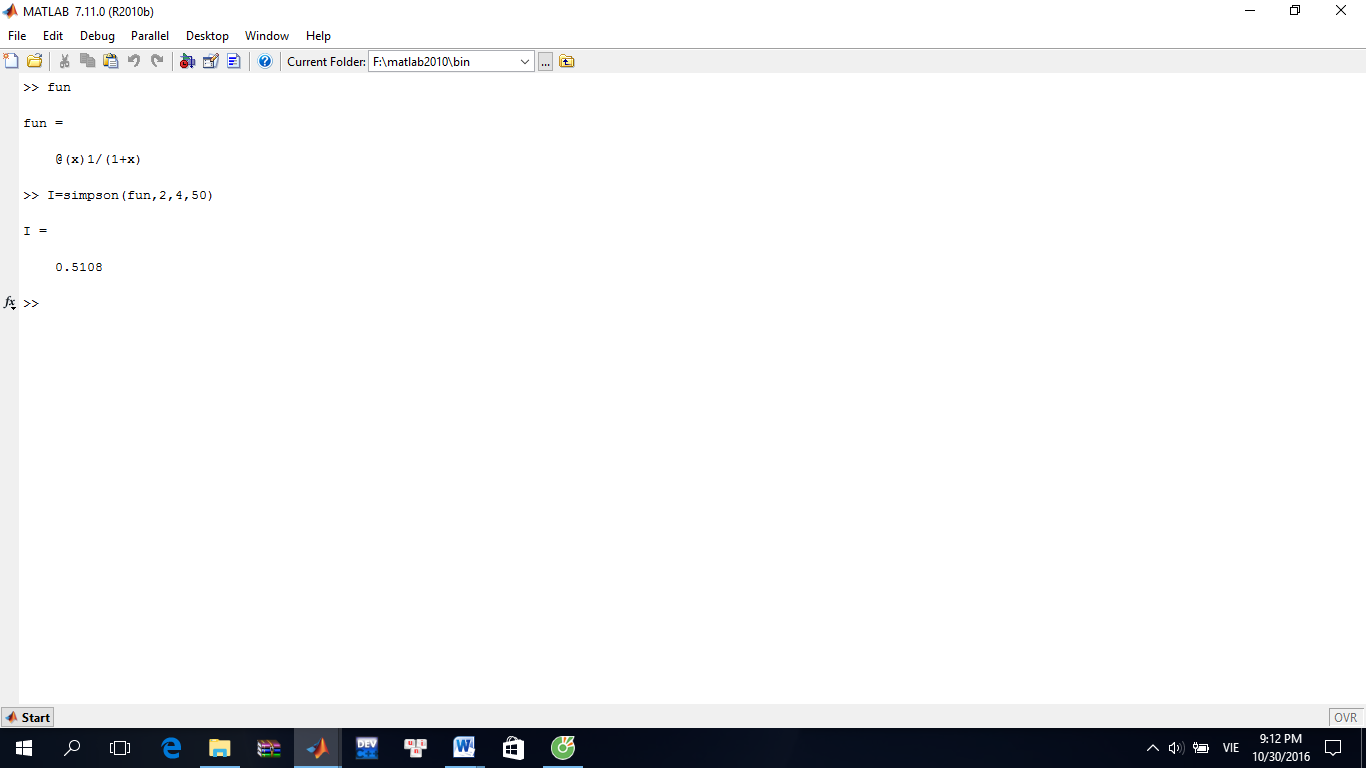
f(i)=feval(fun,x(i));

end

I=(h/3)\*(f(1)+4\*sum(f(2:2:m-1))+2\*sum(f(3:2:m-2))+f(m));

end

Ví dụ:



+) Chương trình tính gần đúng tích phân kép:

function Q = tichphankeplai(fun,x1,x2,y1,y2,n,m,x,y)

h=(x2-x1)/(2\*n);

k=(y2-y1)/(2\*m);

z=zeros(2\*n+1,2\*m+1);

I=zeros(n,m);

X=x1:h:x2;

Y=y1:k:y2;

for j=1:(2\*m+1)

for i=1:(2\*n+1)

z(i,j)=subs(subs(fun,x,X(i)),y,Y(j));

end

end

for i=1:n

for j=1:m

I(i,j)=h\*k\*((z(2\*i-1,2\*j-1)+z(2\*i-1,2\*j+1)+z(2\*i+1,2\*j-1)+z(2\*i+1,2\*j+1))+4\*(z(2\*i,2\*j-1)+z(2\*i,2\*j+1)+z(2\*i-1,2\*j)+z(2\*i+1,2\*j))+16\*z(2\*i,2\*j))/9;

end

end

Q=0;

for i=1:n

for j=1:m

Q=Q+I(i,j);

end

end

end

Ví dụ:

